解答用紙（1）

1

（イ） $\dfrac{2}{3}$

（ロ） $\dfrac{4}{9}e^3 + \dfrac{2}{9}$

（ハ） $\dfrac{1}{2}\log 2$

（ニ） $-\dfrac{1}{x\log x}$

（ホ） 3

（ヘ） $2 - \sqrt{2}$

（ト） $32768\,i$

2

（イ） 1

（ロ） $2a_n + 2^n$

（ハ） $\dfrac{n}{2}$

（ニ） $n\,2^{n+1} - 2^{n+2} + n + 4$

解答用紙（2）

3

（イ） $\dfrac{4}{9}$

（ロ） $\dfrac{13}{36}$

（ハ） $\dfrac{1}{9}$

（ニ） $\dfrac{4}{15}$

4

（イ） $-\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$

（ロ） $\sqrt{2}$

（ハ） $\dfrac{3}{4}$

（ニ） $-\dfrac{11}{12}\vec{a}+\dfrac{1}{6}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$

（ホ） $\dfrac{4}{9}$

解答用紙（3）

5 (1) $y=\sqrt{x^2+1}+\frac{4}{\sqrt{x^2+1}}$ を微分して，

$$y'=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}-\frac{4}{2}\frac{2x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{x(x^2+1)-4x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{x(x^2-3)}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}.\quad \therefore\ y'=0 \iff x=0,\pm\sqrt{3}.$$

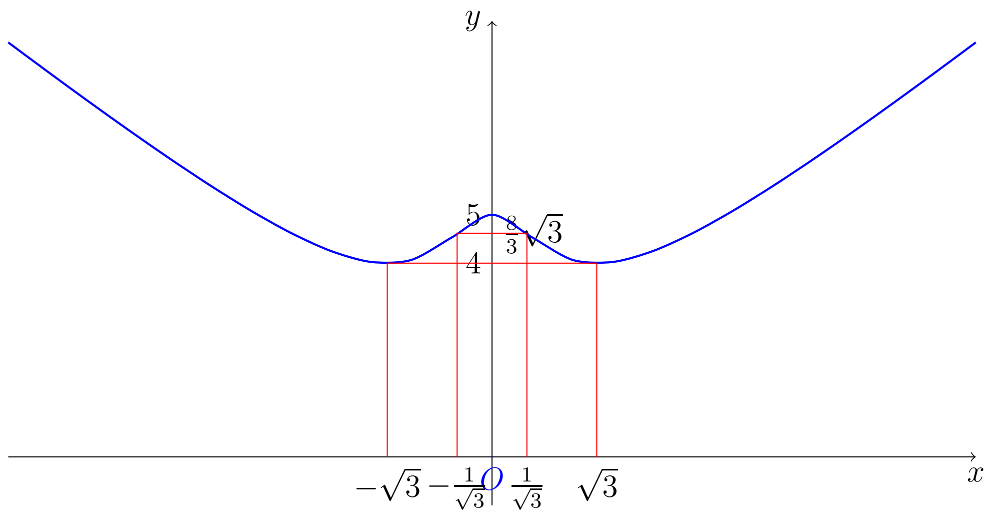
さらに微分して，

$$\begin{aligned}y'' &= \frac{(3x^2-3)(x^2+1)^{\frac{3}{2}}-(x^3-3x)\frac{3}{2}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}(2x)}{(x^2+1)^3}=\frac{(3x^2-3)(x^2+1)-(x^3-3x)(3x)}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}\\ &=\frac{9x^2-3}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}.\quad \therefore\ y''=0 \iff x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

以上より増減表をかくと，

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	↘	4	↗	$\frac{8}{\sqrt{3}}$	↗	5	↘	$\frac{8}{\sqrt{3}}$	↘	4	↗
		極小		変曲点		極大		変曲点		極小	

増減表に基づいて，C を描くと次のようになる．



(2) (1) より $m=4$ なので，

$$\begin{aligned}V &= \pi\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left[\left(\sqrt{x^2+1}+\tfrac{4}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2-4^2\right]dx=2\pi\int_0^{\sqrt{3}}\left(x^2+1+8+\tfrac{16}{x^2+1}-16\right)dx\\ &=2\pi\left[\tfrac{x^3}{3}-7x\right]_0^{\sqrt{3}}+2\pi\int_0^{\sqrt{3}}\tfrac{16}{x^2+1}dx=-12\sqrt{3}\pi+32\pi\int_0^{\pi/3}\tfrac{1}{\tan^2\theta+1}\tfrac{dx}{d\theta}d\theta\quad(x=\tan\theta)\\ &=-12\sqrt{3}\pi+32\pi\int_0^{\pi/3}\tfrac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}d\theta=-12\sqrt{3}\pi+32\pi\,[\theta]_0^{\pi/3}=\boxed{\tfrac{32}{3}\pi^2-12\sqrt{3}\pi}.\end{aligned}$$

解答用紙（4）

$\boxed{\mathbf{6}}$

『a_n が整数である』 $(*)$ ことを数学的帰納法で証明する．

I: $n=1$ のとき，

$$\begin{aligned}
a_1 = \ & e-\int_0^1 xe^{1-x}dx = e-\left[-xe^{1-x}\right]_0^1+\int_0^1 -e^{1-x}dx \\
= \ & e+1+\left[e^{1-x}\right]_0^1 \\
= \ & e+1+(1-e)=2
\end{aligned}$$

となり，$(*)$ がなりたつ．

II: $n=k$ のとき，$(*)$ がなりたつと仮定する．$n=k+1$ のとき，

$$\begin{aligned}
a_{k+1} = \ & (k+1)!\,e-\int_0^1 x^{k+1}e^{1-x}dx \\
= \ & (k+1)!\,e-\left[-x^{k+1}e^{1-x}\right]_0^1+\int_0^1 -(k+1)x^ke^{1-x}dx \\
= \ & (k+1)!\,e-(-1)-\int_0^1 (k+1)x^ke^{1-x}dx \\
= \ & (k+1)\left(k!\,e-\int_0^1 x^ke^{1-x}dx\right)+1 \\
= \ & (k+1)a_k+1.
\end{aligned}$$

したがって，帰納法の仮定より a_{k+1} は整数になる．ゆえに $n=k+1$ でも $(*)$ はなりたつ．

I,II より，すべての自然数 n で $(*)$ はなりたつ． (q.e.d.)