2025年度　入学試験問題

数　　学

【注意事項】

1　係員の指示があるまで，問題冊子を開いてはいけません。

2　この問題冊子は，12ページ，解答用紙は4枚あります。

3　落丁，乱丁，印刷の不鮮明な箇所などがあったときは，手を挙げて係員に申し出てください。

4　各解答用紙（4枚）の受験番号欄に受験番号を数字で記入してください。

5　解答は必ず各問題別の解答用紙の所定の欄に記入してください。

6　問題冊子の余白等は適宜利用してかまいませんが，どのページも切り離してはいけません。

7　試験終了時刻まで退室してはいけません。

8　解答用紙は持ち帰ってはいけません。その他は持ち帰ってください。

1 以下の空欄をうめよ。

(1) $\displaystyle\int_{-\frac{2}{3}}^{\pi-\frac{2}{3}} \sin(3x+2)\,dx$ を求めると $\boxed{\text{イ}}$ である。

(2) $\displaystyle\int_{1}^{e^2} \sqrt{x}\log\sqrt{x}\,dx$ を求めると $\boxed{\text{ロ}}$ である。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}$ を求めると $\boxed{\text{ハ}}$ である。

(4) $\log(\log_x 5)$ を微分すると $\boxed{\text{ニ}}$ である。ただし，$x>1$ とする。

(5) $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，関数 $y = 3\cos^2\theta - 2\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta$ の最大値は $\boxed{\text{ホ}}$ であり，最小値は $\boxed{\text{ヘ}}$ である。

(6) $(i-1)^{30}$ を計算すると $\boxed{\text{ト}}$ である。ただし，i は虚数単位である。

(計　算　用　紙)

（計　算　用　紙）

2 数列$\{a_n\}$の初項a_1から第n項までの和S_nが

$$S_n = 2a_n - 2^n + 1 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

であるとき，以下の空欄をうめよ。

(1) $a_1 =$ $\boxed{\text{イ}}$ である。

(2) a_{n+1}をa_nの式で表すと，$a_{n+1} =$ $\boxed{\text{ロ}}$ である。

(3) $b_n = \dfrac{a_n}{2^n}$ とおく。数列$\{b_n\}$の一般項を求めると，$b_n =$ $\boxed{\text{ハ}}$ である。

(4) $\sum_{k=1}^{n} S_k$ をnの式で表すと，$\sum_{k=1}^{n} S_k =$ $\boxed{\text{ニ}}$ である。

(計　算　用　紙)

(計　算　用　紙)

3 袋Aに3枚，袋Bに2枚，袋Cに3枚のカードが入っている。それぞれのカードには数字が1つ書いてあり，袋A内のカードの数字は1，2，3であり，袋B内のカードの数字は2，3であり，袋C内のカードの数字は3，4，5である。

最初に袋Aから1枚のカードを取り出し，数字を調べてから袋Bに入れる。次に，袋Bから1枚のカードを取り出し，数字を調べてから袋Cに入れる。最後に，袋Cから1枚のカードを取り出す。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 上の操作で，袋Bから取り出したカードの数字が3である確率を求めよ。 $\boxed{\text{イ}}$

(2) 上の操作で，袋Cから取り出したカードの数字が3である確率を求めよ。 $\boxed{\text{ロ}}$

(3) 上の操作で，3つの袋から取り出したカードの数字の合計が6になる確率を求めよ。 $\boxed{\text{ハ}}$

(4) 上の操作で，3つの袋から取り出したカードの数字の合計が偶数であったときに，取り出したカードの数字の合計が6になる確率を求めよ。 $\boxed{\text{ニ}}$

（計　算　用　紙）

(計　算　用　紙)

4 四面体OABCにおいて，線分OAの中点をL，線分OBを1：2に内分する点をMとし，点Oから直線LMに下ろした垂線と直線LMとの交点をHとする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$とし，

$$|\vec{a}|=2\sqrt{2},\quad |\vec{b}|=3,\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=3$$

であるとき，以下の空欄をうめよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{LM}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表すと，$\overrightarrow{\mathrm{LM}}=$ $\boxed{\text{イ}}$ である。また，$|\overrightarrow{\mathrm{LM}}|$の値を求めると，$|\overrightarrow{\mathrm{LM}}|=$ $\boxed{\text{ロ}}$ である。

(2) 点Hが線分LMを$t:1-t$に内分するとき，$t=$ $\boxed{\text{ハ}}$ である。

(3) 線分HCを1：2に内分する点をPとする。$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表すと，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=$ $\boxed{\text{ニ}}$ である。さらにuを$0<u<1$を満たす実数として，線分OCを$u:1-u$に内分する点をQとする。点Qが，3点A，B，Pを通る平面上にあるとき，$u=$ $\boxed{\text{ホ}}$ である。

(計　算　用　紙)

（計　算　用　紙）

5 次の関数$f(x)$を考える。

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}+\frac{4}{\sqrt{x^2+1}}$$

曲線$y=f(x)$をCとする。以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$の増減，極値，Cの凹凸，変曲点を調べて，座標平面上にCの概形をかけ。漸近線は求めなくてよい。(結論に至る過程も記述すること。)

(2) $f(x)$の最小値をaとし，直線$y=a$をlとするとき，Cとlで囲まれた部分を，x軸のまわりに1回転してできる回転体の体積Vを求めよ。

(計　算　用　紙)

（計　算　用　紙）

6 eを自然対数の底とする。すべての自然数nに対して,

$$a_n = n!\,e - \int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx$$

が整数であることを，数学的帰納法を用いて証明せよ。

(計　算　用　紙)

(計　算　用　紙)