

解答用紙 (1)

**1**

(イ)  $\frac{1}{\pi}$

(ロ)  $5 < a < 12$

(ハ) 24

(ニ)  $\frac{1}{2} \log 3$

(ホ)  $p = 7, 19$

(ヘ)  $\frac{1}{4} \leq x < 1$  または  $x \geq 8$

**2**

(イ)  $\frac{1}{2}$

(ロ)  $b_{n+1} = 3b_n - 4$

(ハ)  $b_n = -\frac{3^n}{2} + 2$

(ニ)  $a_n = -\frac{3}{5} \cdot 6^{n-1} + 2^{n+1} - \frac{12}{5}$

解答用紙 (2)

**3**

(イ)  $\frac{91}{216}$

(ロ)  $\frac{37}{216}$

(ハ)  $\frac{1}{12}$

(ニ)  $\frac{18}{37}$

**4**

(イ)  $\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

(ロ) 12

(ハ)  $\frac{k}{4}\vec{a} + \frac{k}{2}\vec{b} + (1-k)\vec{c}$

(ニ)  $\frac{1}{2}$

(ホ)  $\frac{\sqrt{26}}{2}$

解答用紙 (3)

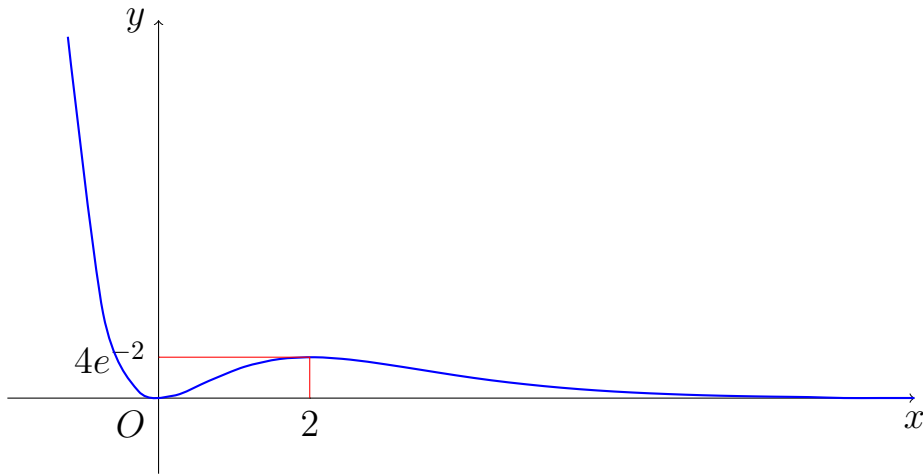
5

(1)  $f(x) = x^2e^{-x}$  を微分して,  $f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = (2x - x^2)e^{-x} = x(2 - x)e^{-x}$ .

以上より増減表をかくと,

$x$	...	0	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$
		極小		極大	

増減表に基づいて  $C$  を描くと以下のようなになる. その際, つねに  $f(x) \geq 0$  であり,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  に注意する.



(2)  $l$  と  $C$  の接点を  $t$  とする.  $l: y = f'(t)(x-t) + f(t) = t(2-t)e^{-t}(x-t) + t^2e^{-t}$  とすると, これが原点を通るので,  $0 = t(2-t)e^{-t}(-t) + t^2e^{-t} = t^2(t-1)e^{-t}$ .  $\therefore t = 0, 1$ . 条件より  $t = 1$ . ゆえに,  $l$  の方程式は  $y = \frac{x}{e}$ . これより  $l$  と  $C$  で囲まれた部分の面積  $S$  は,

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^1 \left( \frac{x}{e} - x^2e^{-x} \right) dx = \left[ \frac{x^2}{2e} \right]_0^1 + \left[ x^2e^{-x} \right]_0^1 - \int_0^1 2xe^{-x} dx \\
 &= \frac{1}{2e} + \frac{1}{e} + \left[ 2xe^{-x} \right]_0^1 - \int_0^1 2e^{-x} dx = \frac{1}{2e} + \frac{1}{e} + \frac{2}{e} + \left[ 2e^{-x} \right]_0^1 \\
 &= \boxed{\frac{11}{2e} - 2}.
 \end{aligned}$$

解答用紙 (4)

**6**

証明すべき命題を単に命題という.  $a_1 = 1$  なので,  $n = 1$  で命題はなりたつ.

$n = k$  で命題がなりたつと仮定する. このとき整数  $m$  を用いて,  $a_k = 6m + s$  ( $s = 1, 5$ ) とかける.  $n = k + 1$  のとき,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k^2 + 2a_k + 2 = (6m + s)^2 + 2(6m + s) + 2 \\ &= 36m^2 + 12ms + s^2 + 12m + 2s + 2 \\ &= 6(6m^2 + 2ms + 2m) + s^2 + 2s + 2. \end{aligned}$$

ここで,  $s^2 + 2s + 2$  は  $s = 1$  のとき 5,  $s = 5$  のとき  $37 = 6 \times 6 + 1$  の値を取るのので,  $a_{k+1}$  は 6 で割ると 1 または 5 余る. よって  $n = k + 1$  でも命題はなりたつ.

ゆえに, すべての自然数  $n$  で命題はなりたつ. (q.e.d.)

(別解)  $a_n$  を 6 で割ると 1 または 5 余るといふ命題  $P_n$  は,  $a_n$  は 2 でも 3 でも割り切れないといふ命題  $Q_n$  と同値である. 実際,  $P_n$  をみたとし  $a_n = 6m + s$  ( $s = 1, 5$ ) であれば明らかに  $Q_n$  をみたとす. 逆に  $Q_n$  をみたとせば, 3 で割れないことから  $a_n = 6m + s$  ( $s = 1, 2, 4, 5$ ) であり, さらに 2 で割れないことから  $s = 1, 5$  を得て  $P_n$  をみたとす. そこで  $Q_n$  を証明する.

$a_1 = 1$  なので,  $Q_1$  はなりたつ.

$Q_k$  がなりたつと仮定する. すると  $a_k$  は奇数なので  $a_k^2$  も奇数であり,  $a_{k+1} = a_k^2 + 2a_k + 2 = a_k^2 + 2(a_k + 1)$  なので,  $a_{k+1}$  は奇数である. また,  $a_k$  は 3 で割り切れないので,  $(a_k + 1)$  または  $(a_k + 2)$  のどちらかは必ず 3 で割り切れる. よって

$$(a_k + 1)(a_k + 2) = a_k^2 + 3a_k + 2$$

も 3 で割り切れる. ゆえに,  $a_k$  が 3 で割り切れないことも合わせると,

$$a_{k+1} = (a_k^2 + 3a_k + 2) - a_k$$

は 3 で割り切れない. 以上より,  $Q_{k+1}$  がなりたつ.

ゆえに, すべての自然数  $n$  で  $Q_n$  はなりたつ. (q.e.d.)